

程氏投影及其在模型降阶中的应用

冯俊娥¹ 张庆乐¹ 赵建立²

(1. 山东大学 数学学院, 山东 济南 250100; 2. 聊城大学 数学科学学院, 山东 聊城 252059)

摘要 研究了程氏投影的性质及其在模型降阶中的应用. 首先介绍程氏投影和传统投影的定义, 并详细地讨论二者的关系. 其次给出程氏投影矩阵, 在此基础上, 分别研究高维向量向低维空间和低维向量向高维空间投影时程氏投影矩阵的具体性质. 最后利用程氏投影提出一种新的模型降阶方法, 并给出两个例子来验证该方法的有效性.

关键词 程氏投影; 程氏投影矩阵; 模型降阶

中图分类号 O231

文献标识码 A

0 引言

近年来, 程代展研究员提出了矩阵等价的理论^[1]. 该理论在许多方面都有着重要的应用. 例如矩阵半张量积通常用于研究布尔网络^[2,3]和博弈论^[4-6], 程氏向量加法和乘法则常用于研究跨维数线性系统^[7]. 前者是传统矩阵乘积的推广, 后者则是传统向量加法和乘法的推广. 基于程氏向量加法, 程代展研究员提出了新的向量投影方法——程氏投影. 传统向量投影方法是保留原向量的前一部分元素, 同时其余元素变为零元素. 程氏投影则是寻找目标投影空间中与原向量距离最小的向量. 与前者相比, 后者较为复杂, 也满足一定条件下的合理性. 因此后者满足许多重要的性质, 并且具有许多的优点. 由于程氏投影刚提出不久, 所以目前只是用来研究跨维数线性系统^[8], 在其他方面的应用还有待于进一步探索与发现. 文献[8]提出了程氏投影, 并利用它对维数无界的跨维数线性系统进行降维, 但其对程氏投影性质的研究并不多. 因此本文详细地研究了程氏投影的一些性质, 并用它来解决线性系统模型降阶问题.

在实际的工程应用中, 控制系统的维数一般都比较大, 而且相当的复杂, 这导致了其相应控制器和观测器的设计成本较高. 模型降阶问题就是寻找一个维数较小且相对简单的系统使其与原系统的一些性能较为接近. 即降低全阶系统数学模型的阶数或状态维数, 以简化其数学模型, 得到维数较低的系统模型. 因为降阶模型的维数较小, 所以一些相关问题的复杂性会有所降低. 因此研究模型降阶问题具有十分重要的意义.

模型降阶在很多方面都有应用: 电力系统^[9], 弹性系统^[10], 刚柔耦合多体系统^[11]等. 利用模型降阶, 我们可以比较方便的了解这些系统的稳定性和鲁棒性. 模型降阶的一般步骤: (1) 收集全阶模型的信息, 给出全阶系统模型描述; (2) 构造降阶模型所在的低维空间; (3) 将全阶模型投影到低维空间, 获得降阶模型. 模型降阶常用的方法有渐近波形估计方法、Pade 近似法、Krylov 子空间法、多点拟合法、正交分解法等. 这些方法已经十分的成熟, 且在许多工程领域都得到很广泛的应用. 同时, 它们各自具有一些特殊的性质和优缺点. 因此, 文献[12]给出了这些方法的分类及特性归纳, 文献[13]则详细研究了它们的优缺点. 在给定高阶系统模型后, 我们利用程氏投影矩阵的性质, 并结合系统模型的特点, 给出了一种求解低阶系统模型的方法. 最后分别给出一个数值例子和一个工程应用的例子来验证该方法的有效性和实用性.

本文将用到的一些记号: (1) δ_n : 单位矩阵 I_n 的第 i 列; (2) $[m, n]$: m 与 n 的最小公倍数; (3) $\mathbf{1}_n$: 元素全为 1 的 n 维列向量; (4) $\text{Row}_i(\mathbf{A})$ ($\text{Col}_i(\mathbf{A})$): 矩阵 \mathbf{A} 的第 i 行(列); (5) 矩阵 $\mathbf{A}_{m \times n}$ 与 $\mathbf{B}_{p \times q}$ 的 Kronecker 积定义为

收稿日期: 2018-12-06

基金项目: 国家自然科学基金项目(61773371; 61877036)资助

通讯作者: 冯俊娥, 女, 汉族, 博士, 教授, 研究方向: 逻辑系统, 鲁棒控制, E-mail: fengjune@sdu.edu.cn.

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

1 程氏投影的定义

在介绍程氏投影之前,我们首先介绍传统投影的定义和它所满足的性质.

定义 1^[14] 设 $m > n$, 给定向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in \mathbf{R}^m$ 和向量空间 \mathbf{R}^n , \mathbf{x} 在 \mathbf{R}^n 空间中的传统投影定义如

$$\Pi_n(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots, 0)^T.$$

由上述的定义可以看出,传统投影是满射,但却不是单射. 同时有 $\Pi_n(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^n$.

定义 2^[15] 设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$. \mathbf{x} 与 \mathbf{y} 的传统内积定义

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m x_i y_i.$$

由传统内积的定义,可知有 $(\mathbf{x} - \Pi_n(\mathbf{x}), \Pi_n(\mathbf{x})) = 0$, 即传统投影满足投影定理.

例 1 设 $\mathbf{x} = (1, 3, 2)^T$, 根据定义 1, \mathbf{x} 的传统投影为 $\mathbf{y} = \Pi_2(\mathbf{x}) = (1, 3, 0)^T$, 进一步可得 $(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$.

在给出程氏投影定义之前,我们需要简单介绍一下程氏向量加法和内积的定义.

定义 3^[1] 设 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{x}$ 和 \mathbf{y} 的程氏向量加法定义 $\mathbf{x} \vec{+} \mathbf{y} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{1}_\alpha + \mathbf{y} \otimes \mathbf{1}_\beta$, 其中 $\alpha = [m, n]/m, \beta = [m, n]/n$.

在此基础上,程氏向量减法可定义

$$\mathbf{x} \vec{-} \mathbf{y} = \mathbf{x} \vec{+} (-\mathbf{y}).$$

与传统向量加法相比,程氏向量加法对两个相加向量的维数没有限制,任意维数的向量都可作程氏向量加法. 并且当相加向量的维数相等时,程氏向量加法就是传统向量加法. 因此传统向量加法是程氏向量加法的特殊情况,而程氏向量加法则是传统向量加法的推广.

例 2 设 $\mathbf{x} = (1, 3)^T$ 和 $\mathbf{y} = (1, 2, 3)^T$, 根据定义 3, 我们可得到

$$\mathbf{x} \vec{+} \mathbf{y} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{1}_\alpha + \mathbf{y} \otimes \mathbf{1}_\beta = (1, 1, 1, 3, 3, 3)^T - (1, 1, 2, 2, 3, 3)^T = (2, 2, 3, 5, 6, 6)^T,$$

$\mathbf{x} \vec{+} (0, 0)^T = (1, 3)^T = \mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x} \vec{+} (0, 0, 0, 0)^T$. 令 $\mathbf{w} = (-1, -1, -3, -3)^T$ 和 $\mathbf{z} = (-1, -3)^T$, 则有 $\mathbf{x} \vec{+} \mathbf{z} = (0, 0)^T$ 和 $\mathbf{x} \vec{+} \mathbf{w} = (0, 0, 0, 0)^T$.

定义 4^[1] 设 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$. 程氏向量内积定义

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_c = \frac{1}{[m, n]} (\mathbf{x} \otimes \mathbf{1}_\alpha, \mathbf{y} \otimes \mathbf{1}_\beta),$$

其中 $\alpha = [m, n]/m, \beta = [m, n]/n$.

根据上述内积的定义,相应的向量范数可定义

$$\|\mathbf{x}\|_c = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})_c}.$$

在计算传统向量内积时,必须要求向量具有相同的维数,否则传统向量内积就没有意义. 程氏向量内积则对向量的维数没有要求,且对任意的 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$, 其传统范数是程氏向量范数的 \sqrt{n} 倍.

例 3 设 $\mathbf{x} = (1, 2, 3)^T, \mathbf{y} = (4, 5)^T$, 则有

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_c = \frac{1}{6} (\mathbf{x} \otimes \mathbf{1}_2, \mathbf{y} \otimes \mathbf{1}_3) = \frac{28}{3}, \|\mathbf{x}\|_c = \sqrt{\frac{14}{3}} \text{ 和 } \|\mathbf{y}\|_c = \sqrt{\frac{41}{2}}.$$

下面我们给出程氏投影的定义.

定义 5^[8] 若 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m, \mathbf{x}$ 在 \mathbf{R}^n 空间中的程氏投影 $\Pi_n^m(\mathbf{x})$ 定义

$$\Pi_n^m(\mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n} \|\mathbf{x} \vec{-} \mathbf{y}\|_c.$$

值得注意的是,与传统投影的定义相比,在程氏投影的定义中没有 $m > n$ 的条件,且经过程氏投影后得到的向量 $\Pi_n^m(\mathbf{x})$ 是 n 维列向量.

下面的两个引理分别给出了程氏投影的计算方法和它所满足的投影定理.

引理 1^[8] 设 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_m)^\top$ 和 $\mathbf{y}=\Pi_n^m(\mathbf{x})=(y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$, 则有 $y_i=\frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{\beta} \eta_{(i-1)\beta+j}, i=1, 2, \dots, m$, 其中 $\mathbf{x} \otimes \mathbf{1}_\alpha=(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{[m, n]})^\top, \alpha=[m, n] / m, \beta=[m, n] / n$.

引理 2^[8] 设 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ 和 $\Pi_n^m(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^n$, 则有 $(\mathbf{x} \xrightarrow{\rightarrow} \Pi_n^m(\mathbf{x}), \Pi_n^m(\mathbf{x}))_c=0$.

例 4 设 $\mathbf{x}=(1, 3, 2)^\top, \mathbf{y}=\Pi_2^3(\mathbf{x})=(y_1, y_2)^\top$ 是 \mathbf{x} 在 \mathbf{R}^2 中的程氏投影. 根据引理 1, 可得 $\mathbf{y}=(\frac{5}{3}, \frac{7}{3})^\top$, 进一步可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \xrightarrow{\rightarrow} \mathbf{y} &= \mathbf{x} \otimes \mathbf{1}_2 - \mathbf{y} \otimes \mathbf{1}_3 \\ &= (1, 1, 3, 3, 2, 2)^\top - (\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3})^\top \\ &= (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})^\top \end{aligned}$$

和 $(\mathbf{x} \xrightarrow{\rightarrow} \mathbf{y}, \mathbf{y})_c=0$.

通过例 1 和例 4, 我们可以看出程氏投影和传统投影在各自内积定义下都满足投影定理. 另外, 这两种投影定义的不同之处: (1) 与传统投影只能从高维空间向低维空间投影不同, 程氏投影既可从高维向低维空间投影, 也可从低维向高维空间投影; (2) 传统投影得到的向量与原向量维数一致, 但经程氏投影所得向量与目标空间的维数一致.

2 程氏投影的性质

在这一部分, 我们将研究程氏投影所满足的一些性质. 由程氏投影的定义可知, 在给定向量空间 \mathbf{R}^m 和 \mathbf{R}^n 后, 程氏投影是 \mathbf{R}^m 到 \mathbf{R}^n 的线性映射, 可知它有相应的矩阵表示. 因此在讨论程氏投影的性质之前, 我们先介绍程氏投影的矩阵表示.

引理 3^[8] 设 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m, \mathbf{y}=\Pi_n^m(\mathbf{x})$ 为 \mathbf{x} 在 \mathbf{R}^n 中的程氏投影向量, 则有 $\mathbf{y}=\mathbf{F}_n^m \mathbf{x}$. 其中 $\mathbf{F}_n^m=\frac{1}{\beta}(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{1}_\beta^\top)(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{1}_\alpha)$ 称为程氏投影矩阵, $\alpha=[m, n] / m, \beta=[m, n] / n$.

需要注意的是, 引理 3 不仅对 $m < n$ 成立, 而且对 $m \geq n$ 也成立. 若有 $m=n$, 程氏投影是单位映射, 此时其投影矩阵是单位矩阵. 因此在下面, 我们分别研究在 $m < n$ 和 $m > n$ 这两种情况下程氏投影矩阵 \mathbf{F}_n^m 所满足的性质.

2.1 低维向量向高维空间投影

定理 1 设 $m < n$, 则程氏投影矩阵 \mathbf{F}_n^m 是列满秩矩阵, 且满足 $\sum_{i=1}^n \text{Row}_i(\mathbf{F}_n^m)=\frac{n}{m} \mathbf{1}_m^\top$ 和 $\sum_{j=1}^m \text{Col}_j(\mathbf{F}_n^m)=\mathbf{1}_n$.

证明 令 $\alpha=[m, n] / m, \beta=[m, n] / n$, 则 α 与 β 互质.

若 $\beta \neq 1$, 因 α 与 β 互质且有 $\beta < \alpha$, 故 β 不能整除 α , 可设 $\alpha=s\beta+r, s \geq 1, 0 < r < \beta$. 对任意的整数 $i \in [1, \beta]$, 记 h_i 为 $[(i-1)\alpha, i\alpha]$ 中能整除 β 的点的个数. 因任给整数 $i \in [1, \beta-1]$ 都有 β 不能整除 $i\alpha$, 因此有 $h_i \in \{s, s+1\}$. 令 $k_0=0, k_j=\sum_{i=1}^j h_i$, 则显然有 $k_\beta+1=\alpha$.

设 $\mathbf{E}_\alpha^\beta=(\mathbf{I}_\alpha \otimes \mathbf{1}_\beta^\top)(\mathbf{I}_\beta \otimes \mathbf{1}_\alpha)$, 则有

$$(\mathbf{E}_\alpha^\beta)_{ij}=\text{Row}_i(\mathbf{I}_\alpha \otimes \mathbf{1}_\beta^\top) \text{Col}_j(\mathbf{I}_\beta \otimes \mathbf{1}_\alpha)=[(\delta_\alpha^i)^\top \otimes \mathbf{1}_\beta^\top](\delta_\beta^j \otimes \mathbf{1}_\alpha)=(\delta_\alpha^i \otimes \mathbf{1}_\beta)^\top(\delta_\beta^j \otimes \mathbf{1}_\alpha),$$

进一步可得

$$(\mathbf{E}_\alpha^\beta)_{ij} \in \begin{cases} \{1, 2, \dots, \beta\}, i \in [k_{j-1}+1, k_j+1] \cap \mathbf{N}, \\ \{0\}, i \in ([1, k_{j-1}] \cup [k_j+2, \alpha]) \cap \mathbf{N}, \end{cases}$$

因此 $\text{Col}_j(\mathbf{E}_\alpha^\beta)$ 的第 $k_{j-1}+1$ 个到第 k_j+1 个的位置为非零元素, 而其余的元素全为零. 由 j 的任意性可知, 矩阵 \mathbf{E}_α^β 是列满秩的. 令 $\xi=m/\beta=n/\alpha$, 则根据矩阵 \mathbf{F}_n^m 和 \mathbf{E}_α^β 的构造方式, 可得

$$\mathbf{F}_n^m=\frac{1}{\beta}(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{1}_\beta^\top)(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{1}_\alpha)=\frac{1}{\beta}[\mathbf{I}_\xi \otimes (\mathbf{I}_\alpha \otimes \mathbf{1}_\beta^\top)][\mathbf{I}_\xi(\mathbf{I}_\beta \otimes \mathbf{1}_\alpha)]=\frac{1}{\beta} \mathbf{I}_\xi \otimes [(\mathbf{I}_\alpha \otimes \mathbf{1}_\beta^\top)(\mathbf{I}_\beta \otimes \mathbf{1}_\alpha)]=\frac{1}{\beta}(\mathbf{I}_\xi \otimes \mathbf{E}_\alpha^\beta).$$

因 \mathbf{E}_α^β 是列满秩矩阵, 故 \mathbf{F}_n^m 也必是列满秩矩阵. 因有

$$\sum_{j=1}^{\beta} \text{Col}_j(\mathbf{E}_\alpha^\beta) = \sum_{j=1}^{\beta} (\mathbf{I}_\alpha \otimes \mathbf{1}_\beta^T) (\delta_\beta^j \otimes \mathbf{1}_\alpha) = \sum_{j=1}^{\beta} \sum_{i=1}^{j\alpha} \text{Col}_i(\mathbf{I}_\alpha \otimes \mathbf{1}_\beta^T) = \sum_{k=1}^{\alpha\beta} \text{Col}_k(\mathbf{I}_\alpha \otimes \mathbf{1}_\beta^T) = \beta \mathbf{1}_\alpha$$

和

$$\sum_{i=1}^{\alpha} \text{Row}_i(\mathbf{E}_\alpha^\beta) = \sum_{i=1}^{\alpha} (\delta_\alpha^i \otimes \mathbf{1}_\beta) (\mathbf{I}_\beta \otimes \mathbf{1}_\alpha) = \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=(i-1)\beta}^{i\beta} \text{Row}_j(\mathbf{I}_\beta \otimes \mathbf{1}_\alpha) = \sum_{k=1}^{\alpha\beta} \text{Row}_k(\mathbf{I}_\beta \otimes \mathbf{1}_\alpha) = \alpha \mathbf{1}_\beta^T,$$

故可得

$$\sum_{j=1}^m \text{Col}_j(\mathbf{F}_n^m) = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{\xi} [\delta_\xi^i \otimes (\sum_{j=1}^{\beta} \text{Col}_j(\mathbf{E}_\alpha^\beta))] = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{\xi} [\delta_\xi^i \otimes (\beta \mathbf{1}_\alpha)] = \mathbf{1}_n$$

和

$$\sum_{i=1}^n \text{Row}_i(\mathbf{F}_n^m) = \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{\xi} [(\delta_\xi^j)^T \otimes (\sum_{i=1}^{\alpha} \text{Row}_i(\mathbf{E}_\alpha^\beta))] = \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{\xi} [(\delta_\xi^j)^T \otimes (\alpha \mathbf{1}_\beta^T)] = \frac{n}{m} \mathbf{1}_m^T,$$

若 $\beta=1$, 此时 $\mathbf{F}_n^m = \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{1}_\alpha$, 显然成立. 综上所述, 定理 1 得证.

由上面的证明, 可知 $\mathbf{F}_n^m = \frac{1}{\beta} \text{diag}\{\mathbf{E}_\alpha^\beta, \mathbf{E}_\alpha^\beta, \dots, \mathbf{E}_\alpha^\beta\}$, 且该矩阵的元素都属于闭区间 $[0, 1]$. 因此在计算 \mathbf{F}_n^m 时, 只需要计算 \mathbf{E}_α^β 既可. 利用定理 1, 我们可得如下的定理.

定理 2 若有 $m < n$ 和 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$, 则程氏映射 $\Pi_n^m(\mathbf{x})$ 是 \mathbf{R}^m 到 Ψ 的双射. 其中 $\Psi = \{\sum_{i=1}^m r_i \text{Col}_i(\mathbf{F}_n^m) \mid r_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, m.\} \subset \mathbf{R}^n$.

证明 任给 $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}'' \in \mathbf{R}^m$, 令 $\mathbf{y}' = \Pi_n^m(\mathbf{x}')$ 和 $\mathbf{y}'' = \Pi_n^m(\mathbf{x}'')$, 则一定有 $\mathbf{y}' \neq \mathbf{y}'' \in \Psi$. 否则 $\mathbf{y}' = \mathbf{y}''$, 进而可知 $\mathbf{F}_n^m(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') = \mathbf{0}$. 因有 $m < n$, 可知 \mathbf{F}_n^m 是列满秩的, 则可得 $\mathbf{x}' = \mathbf{x}''$. 显然这与 $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}''$ 矛盾, 因此程氏映射 Π 是 \mathbf{R}^m 到 Ψ 的单射.

因 \mathbf{F}_n^m 是列满秩矩阵, 故 $\text{Col}_1(\mathbf{F}_n^m), \text{Col}_2(\mathbf{F}_n^m), \dots, \text{Col}_m(\mathbf{F}_n^m)$ 是 Ψ 的一组基. 因此对任意的 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0} \in \Psi$, 都存在非零向量 $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)^T \in \mathbf{R}^m$ 使得

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^m \gamma_i \text{Col}_i(\mathbf{F}_n^m) = \mathbf{F}_n^m \boldsymbol{\gamma}.$$

所以程氏映射 Π 是 \mathbf{R}^m 到 Ψ 的满射.

当 $m=1$ 时, 此时有 $\mathbf{F}_n^1 = \mathbf{1}_n$. 因此对任意的 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$, 都有 $\mathbf{y} = \Pi_n^1(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_n^1 \mathbf{x} = (x, x, \dots, x)^T$. 由定理 2 可知, 程氏映射 $\Pi: \mathbf{x} \rightarrow \Pi_n^1(\mathbf{x})$ 是一维坐标轴到 n 维空间中满足 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 的曲线的双射. 特别的, 若 $n=2$, 根据以上的分析, 可知在程氏投影下, 一维空间中的任意点 x_0 都唯一对应于二维平面中的 (x_0, x_0) . 因二维平面中所有的 (x_0, x_0) 组成了直线 $y=x$, 因此在这种情况下, 程氏投影可以看作一维空间到二维平面中 $y=x$ 这一直线的双射. 同理可知, 若 $n=3$, 程氏投影建立一维空间到三维空间中 $y=x=z$ 这一直线的双射关系.

2.2 高维向量向低维空间投影

定理 3 若有 $m > n$, 则程氏投影矩阵 \mathbf{F}_n^m 是行满秩矩阵, 且有 $\sum_{i=1}^n \text{Row}_i(\mathbf{F}_n^m) = \frac{n}{m} \mathbf{1}_m^T$ 和 $\sum_{j=1}^m \text{Col}_j(\mathbf{F}_n^m) = \mathbf{1}_n$.

证明 根据程氏投影矩阵 \mathbf{F}_n^m 定义, 可得

$$(\mathbf{F}_n^m)^T = \frac{1}{\beta} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{1}_\alpha)^T (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{1}_\beta^T)^T = \frac{1}{\beta} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{1}_\alpha^T) (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{1}_\beta) = \frac{\alpha}{\beta} \mathbf{F}_m^n.$$

由定理 1, 可知 \mathbf{F}_m^n 是列满秩矩阵, 故 \mathbf{F}_n^m 是行满秩矩阵. 进一步可得

$$\sum_{i=1}^n \text{Row}_i(\mathbf{F}_n^m) = \frac{\alpha}{\beta} (\sum_{j=1}^n \text{Col}_j(\mathbf{F}_m^n))^T = \frac{n}{m} \mathbf{1}_m^T, \quad \sum_{j=1}^m \text{Col}_j(\mathbf{F}_n^m) = \frac{\alpha}{\beta} (\sum_{i=1}^m \text{Row}_i(\mathbf{F}_m^n))^T = \mathbf{1}_n.$$

定理 4 若有 $m > n$ 和 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$, 则程氏映射 $\Pi: \mathbf{x} \rightarrow \Pi_n^m(\mathbf{x})$ 是 \mathbf{R}^m 到 \mathbf{R}^n 的满射.

证明 任给 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$, 因 \mathbf{F}_n^m 是行满秩矩阵, 则一定有 $\text{rank}(\mathbf{F}_n^m) = \text{rank}([\mathbf{F}_n^m, \mathbf{y}])$, 所以方程 $\mathbf{F}_n^m \mathbf{x} = \mathbf{y}$ 存在非零解 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$. 故程氏映射 Π 是 \mathbf{R}^m 到 \mathbf{R}^n 的满射.

3 程氏投影在模型降阶中的应用

在这一部分,我们将利用程氏投影来解决模型降阶问题.主要的思路是:在给定全阶系统模型后,首先将该系统的状态投影到一个低维向量空间,并把所得的程氏投影向量作为降阶模型的状态,由定理4可知此时这个低维向量空间就是降阶模型的状态空间;其次根据全阶模型的信息和程氏投影矩阵的性质,可得到相应的降阶模型.

考虑如下的全阶线性系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^p$ 和 $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^q$ 分别为系统(1)的状态,输入和输出.

给定向量空间 \mathbf{R}^n ($n < m$), 将系统(1)的状态 $\mathbf{x}(t)$ 投影到 \mathbf{R}^n 中, 所得程氏投影向量记为 $\mathbf{x}_p(t)$. 由引理3, 可得 $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{F}_n^m \mathbf{x}(t)$. 设系统(1)经过程氏投影后所得的降阶模型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{D}_p \mathbf{u}(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\mathbf{x}_p(t) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^p$ 和 $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^q$ 分别为系统(2)的状态,输入和输出.

显然我们只是对系统(1)的状态空间 \mathbf{R}^m 进行程氏投影,输入空间 \mathbf{R}^p 和输出空间 \mathbf{R}^q 并没有改变. 下面我们给出求解系统(2)的系数矩阵的定理.

定理5 降阶模型(2)的系数矩阵的求解公式

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_p &= \mathbf{F}_n^m \mathbf{A} (\mathbf{F}_n^m)^\top (\mathbf{F}_n^m (\mathbf{F}_n^m)^\top)^{-1}, \mathbf{B}_p = \mathbf{F}_n^m \mathbf{B}, \\ \mathbf{C}_p &= \mathbf{C} (\mathbf{F}_n^m)^\top (\mathbf{F}_n^m (\mathbf{F}_n^m)^\top)^{-1}, \mathbf{D}_p = \mathbf{D}. \end{aligned}$$

证明 由 $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{F}_n^m \mathbf{x}(t)$, 我们有

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{F}_n^m \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}_n^m \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_n^m \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{F}_n^m \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t), \quad (4)$$

(3)与(4)相减可得

$$(\mathbf{F}_n^m \mathbf{A} - \mathbf{A}_p \mathbf{F}_n^m) \mathbf{x}(t) + (\mathbf{F}_n^m \mathbf{B} - \mathbf{B}_p) \mathbf{u}(t) = 0,$$

由 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{u}(t)$ 的任意性, 可得 $\mathbf{F}_n^m \mathbf{A} - \mathbf{A}_p \mathbf{F}_n^m = 0$ 和 $\mathbf{F}_n^m \mathbf{B} - \mathbf{B}_p = 0$. 因为 \mathbf{F}_n^m 是行满秩矩阵, 所以 $\mathbf{F}_n^m (\mathbf{F}_n^m)^\top$ 是可逆矩阵, 故可得 $\mathbf{A}_p = \mathbf{F}_n^m \mathbf{A} (\mathbf{F}_n^m)^\top (\mathbf{F}_n^m (\mathbf{F}_n^m)^\top)^{-1}$ 和 $\mathbf{B}_p = \mathbf{F}_n^m \mathbf{B}$. 同理可得 $\mathbf{C}_p = \mathbf{C} (\mathbf{F}_n^m)^\top (\mathbf{F}_n^m (\mathbf{F}_n^m)^\top)^{-1}$ 和 $\mathbf{D}_p = \mathbf{D}$.

例5 考虑如下的线性系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{其中 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 7 & -9 & -8 & -4 \\ -4 & 1 & -7 & 10 & -2 \\ -1 & 7 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -4 & 4 & 6 \\ -10 & 1 & 8 & 10 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -8 & -3 \\ -7 & -7 \\ -3 & -6 \\ -9 & 9 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -8 & 5 & -7 & -4 \\ 9 & 5 & 1 & 2 & -8 \end{bmatrix}.$$

给定降阶模型所在的低维状态空间 \mathbf{R}^3 , 则可得系统(5)的状态 $\mathbf{x}(t)$ 在 \mathbf{R}^3 中的程氏投影为 $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{F}_3^5 \mathbf{x}(t)$.

由引理3, 可计算得到 $\mathbf{F}_3^5 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$. 再根据定理5, 可得系统(5)的降阶系统模型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t), \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{其中 } \mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} 0.3043 & -8.9778 & -2.9265 \\ 1.6991 & 1.9556 & 2.5453 \\ -7.8701 & 6.1556 & 12.5145 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} -7.6 & 4.6 \\ -5 & -3.2 \\ -3.6 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} -7.8205 & 3.3333 & -10.5128 \\ 13.6838 & 3.5556 & -8.2393 \end{bmatrix}.$$

利用程氏投影,我们由系统(5)得到了低维数的系统(6).显然两个系统的状态空间不同,但有相同的输入和输出空间.

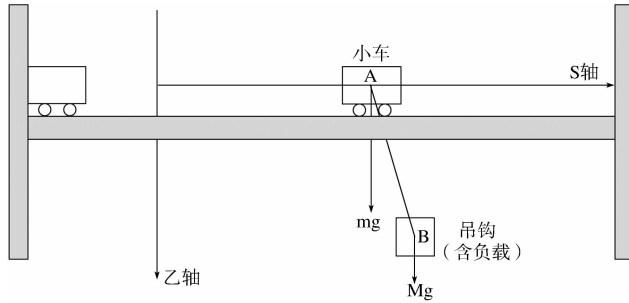


图1 桥式吊车示意图

例 6^[16] 图1中吊车的工作流程是将负载从地面垂直吊到一个预先规定的位置,然后送至某个对象的上方,最后将负载在一个确定的位置卸下.其中A为运行在桥架上的吊车, m 为吊车的质量,B为吊钩和M为吊钩(含吊钩)的质量. ($g=9.8 \text{ N/kg}$ 为重力系数)

令 $\mathbf{x} = (s_A, \dot{s}_A, \theta, \dot{\theta}, F_A)^T$ 为状态变量, $\mathbf{y} = (s_A, \theta)^T$ 为输出变量, $\mathbf{u} = U_A$ 为输入变量. 其中 s_A 为吊车在 s 轴上的位移, θ 为绳索与垂直方向的夹角, F_A 为作用在吊车上的水平牵引力和 U_A 为驱动吊车的直流电动机的控制电压. 根据[16]中所建立的系统模型,我们可得

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{cases}$$

$$\text{其中 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Mg}{m} & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(M+m)g}{ml} & 0 & \frac{1}{ml} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_A} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_A}{T_A} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, l \text{ 为绳索的长度, } K_A \text{ 和 } T_A \text{ 分}$$

别为放大的倍数和时间常数.

我们仍然用[16]中所给出的参数: $M=4000 \text{ kg}$, $m=1000 \text{ kg}$, $l=10 \text{ m}$, $T_A=1 \text{ s}$ 和 $K_A=0.1 \text{ kN/V}$. 因此,我们可得

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 39.2 & 0 & 0.001 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4.9 & 0 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

给定降阶模型所在的低维空间 \mathbf{R}^3 , 则可知原系统的状态 $\mathbf{x}(t)$ 在 \mathbf{R}^3 中的程氏投影为 $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{F}_3^5 \mathbf{x}(t)$. 根据定理5, 可得原系统的降阶系统模型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t), \end{cases}$$

$$\text{其中 } \mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} -3.0537 & 22.8488 & -3.5147 \\ -1.5552 & 10.1088 & -1.0934 \\ 0.4561 & -2.9645 & 1.1484 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.06 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} 1.1880 & -0.2222 & 0.0342 \\ 0.2222 & 1.4444 & -0.2222 \end{bmatrix}.$$

4 结论

本文主要研究了程氏投影及其投影矩阵的性质. 同已有结果相比,我们得到了更多更加详细的关于程氏投影矩阵的性质. 基于这些性质,结合线性系统模型的特点,提出了一种模型降阶的方法. 值得注意的是,由于模型降阶所得变量是原系统变量的一种重组,所以降阶后的模型变量就不再具有原系统变量的物理意义了. 至于如何从降阶模型所得的控制数据如何反馈回原系统模型,以及这种降阶的性质、该方法的优缺点以及如何将其推广到其他的系统模型中将是未来研究工作的一个方向.

参 考 文 献

- [1] Cheng D Z. On equivalence of matrices[J]. *Asian Journal of Mathematics*, 2016, 12(1): 378-385.
- [2] Li H T, Xie L H, Wang Y Z. Output regulation of Boolean control networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(6): 2993-2998.
- [3] Lu J Q, Zhong J, Huang C, Cao J D. On pinning controllability of Boolean control networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(6): 1658-1663.
- [4] Cheng D Z. On finite potential games[J]. *Automatica*, 2014, 50(7): 1793-1801.
- [5] Zhao G D, Wang Y Z. Formulation and optimization control of a class of networked evolutionary games with switched topologies[J]. *Non-linear Analysis: Hybrid Systems*, 2016, 2: 98-107.
- [6] 邢海云. 矩阵的半张量积在进化博弈论中的应用[J]. *聊城大学学报(自然科学版)*, 2016, 29(1): 1-4.
- [7] Zhang K Z, Johansson K H. Long-term behavior of cross-dimensional linear dynamical systems[C]. // 37th Chinese Control Conference, 2018.
- [8] Cheng D Z, Qi H S, Li Z Q. Linear system on dimension-varying state space[C]. // IEEE International Conference on Control and Automation, 2018.
- [9] 赵刚, 刘瑞叶, 余小燕. 一种电力系统动态仿真模型降阶方法[J]. *黑龙江电力*, 2006, 28(3): 186-189.
- [10] 熊纲, 杨超. 平衡截断方法在气动伺服弹性系统模型降阶中的应用[J]. *航空学报*, 2001, 22(2): 168-170.
- [11] 孙东阳, 陈国平. 刚柔耦合多体系统动力学模型降阶[J]. *振动工程学报*, 2014, 27(5): 708-714.
- [12] 朱耀麟, 杨志海, 陈西豪. 模型降阶方法研究[J]. *微计算机信息*, 2011, 27(5): 22-25.
- [13] 代冀阳, 冉桥, 蒋沅, 等几种模型降阶方法的仿真对比研究[J]. *计算机仿真*, 2013, 30(2): 257-260.
- [14] Strang G. *Introduction to Linear Algebra*[M]. 4th Edition. Cambridge: Wellesley-Cambridge Press, 2009.
- [15] 张贤达. *矩阵分析与应用*[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [16] 龚乐年. *现代控制理论题解分析与指导*[M]. 2 版. 北京: 东南大学出版社, 2005.

Cheng's Projection and Its Application in Model Reduction

FENG Jun-e¹ ZHANG Qing-le¹ ZHAO Jian-li²

(1. School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, China;

2. School of Mathematical Science, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract This paper mainly studies the properties of Cheng's projection and its application in model reduction. Firstly, the definitions of Cheng's projection and traditional projection are introduced, as well as the similarities and differences between them are summarized in details. Secondly, the Cheng's projection matrix is given. On this basis, the properties of projection matrices are studied for the projections of vectors with high dimensions to spaces with low dimension and vectors with low dimensions to spaces with high dimensions, respectively. Finally, a new model reduction method is proposed by using Cheng's projection, and two illustration examples are given to verify the effectiveness of this method.

Key words Cheng's projection; projection matrix; model reduction